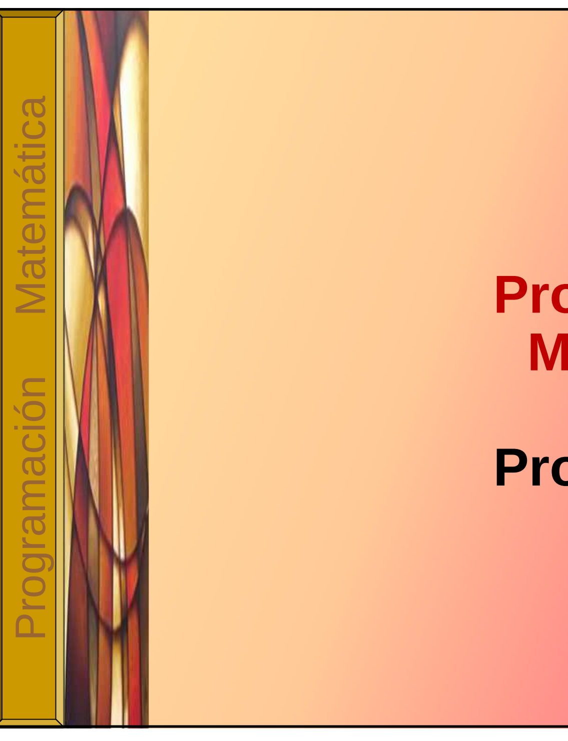




Programación Matemática

Programación Lineal

Programación Lineal

Programación Lineal

Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, su impacto desde 1950 ha sido extraordinario.

Una proporción muy grande de los cálculos científicos en computadoras está dedicada al uso de la programación lineal.

El tipo más común de aplicación es el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible.

Este problema incluye elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas.

Programación Lineal

Programación Lineal

La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande:

- **asignación de instalaciones de producción a los productos**
- **asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país**
- **selección de una cartera de inversiones**
- **selección de los patrones de envío**
- **planeación agrícola**
- **diseño de una terapia de radiación, etc.**

La característica común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades eligiendo los niveles de las mismas.

Programación Lineal

Programación Lineal

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema.

El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deber ser funciones lineales.

La palabra programación no se refiere a programación en computadoras; se usa como sinónimo de planeación.

DEFINICION PROGRAMACIÓN LINEAL:
Conjunto de técnicas matemáticas que pretenden optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo, función lineal de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, expresadas por inecuaciones lineales.

Programación Lineal

Formulación: Problemas

EJEMPLO:
Una empresa se dedica al ensamblaje de dos tipos de motores A y B. Cuenta con determinados componentes para el montaje de los dos productos finales. Se dispone de 8 piezas pequeñas y 6 piezas grandes, que son utilizadas para elaborar los motores tipo A (usando 2 piezas pequeñas y 1 pieza grande) y los motores tipo B (usando 2 piezas de cada tipo).

Interesa decidir cuántos motores de cada tipo se debe fabricar de modo de obtener la máxima utilidad, sabiendo que el beneficio neto es de U$ 15 por cada motor A y de U$20 por cada motor B.

Variables:

Función Objetivo:

Restricciones:

Programación Lineal

Formulación: Problemas

Se pueden enunciar diferentes soluciones factibles, esto es soluciones que respetan las restricciones del número de piezas disponibles.

Por ejemplo, fabricar:

- **4 motores tipo A , que reportan una utilidad de U$60**
- **1 motor tipo A y 2 motores tipo B, utilidad de U$55**
- **3 motores tipo B, utilidad de U$60**
- **1 motor tipo A y 3 motores tipo B, utilidad de U$65**
- **2 motores tipo A y 2 motores tipo B, utilidad de U$70**

Programación Lineal

Formulación: Problemas

Variables de decisión:

Definir las variables de decisión consiste en definir cuáles son las decisiones que se debe tomar.
En el ejemplo,

x: número de motores tipo A
y: número de motores tipo B

Función objetivo del problema:

Permite tener un criterio para decidir entre todas las soluciones factibles. En el ejemplo, maximizar la utilidad dada por:

$$z = f(x,y) = 15x + 20y$$

Luego:

$$\text{Max } z = f(x,y) = 15x + 20y$$

Programación Lineal

Formulación: Problemas

Restricciones del problema:

Conjunto de ecuaciones e inecuaciones que restringen los valores de las variables de decisión a aquellos considerados como factibles.

En el ejemplo, respetar la disponibilidad de piezas para la fabricación de motores tipo A y motores tipo B:

motores tipo A : $2x + 2y \leq 8$
motores tipo B : $x + 2y \leq 6$

También se impone restricciones de no – negatividad:

$$x,y \geq 0$$

Formulación: Problemas

En resumen: **Max** $15x + 20y$

sujeto a: $2x + 2y \leq 8$

$x + 2y \leq 6$

$x, y \geq 0$

El ejemplo corresponde a un modelo de Programación Lineal.
Si se restringe los valores de x e y a números enteros, se tendría un modelo de Programación Entera.

Programación Lineal

Formulación: Problemas

EJEMPLO: MAXIMO

En una granja se preparan dos clases de alimentos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kg de A y 2 de B, y un saco de Q contiene 10 kg de A y 5 de B. Cada saco de P se vende a 300 soles y cada saco de Q a 800 soles. Si en la granja hay almacenados 80 kg de A y 25 de B, ¿cuántos sacos de cada tipo de alimento se deben preparar para obtener los máximos ingresos?

Variables:

Función Objetivo:

Restricciones:

Programación Lineal

Programación Lineal

Formulación: Problemas

EJEMPLO: MÍNIMO

Una campaña para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor a limón o a fresa. Se decide repartir al menos 800 yogures. Cada yogur de limón necesita para su elaboración 0.5 gramos de un producto de fermentación y cada yogur de fresa necesita 0.2 gramos de este mismo producto. Se dispone de 9 kilogramos de este producto para fermentación. El costo de producción de un yogur de limón es de 3 soles y 2 soles uno de fresa.¿cuál debe ser su plan de producción?

Variables:

Función Objetivo:

Restricciones:

Programación Lineal

Formulación: Problemas

EJEMPLO:

Se procesan tres productos a través de tres operaciones diferentes. Los tiempos (en minutos) requeridos por unidad de cada producto en cada operación, la capacidad diaria de las operaciones (en minutos por día) y los beneficios por unidad vendida de cada producto (en miles de soles) son como sigue:

Operación	Tiempo por unidad (minutos) P_1	P_2	P_3	Capacidad de operación (minutos/día)
1	1	2	1	430
2	8	0	2	460
3	1	4	0	420
Ganancias/unidad	3	2	5	

Si todas las unidades producidas se venden, elaborar un modelo para determinar la producción diaria óptima para cada producto.

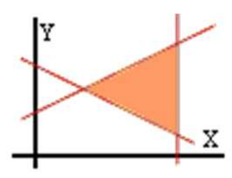
Variables:
Función Objetivo:
Restricciones:

Programación Lineal

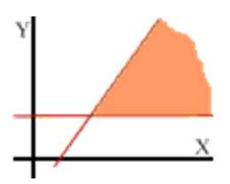
Determinación de la región factible

DEFINICIÓN: REGIÓN FACTIBLE

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas restricciones. Esta recibe el nombre de *región factible*, y puede estar o no acotada



Región factible acotada



Región factible no acotada

Programación Lineal

Determinación de la región factible

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

1) Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.

- **Se dibuja la recta asociada a la inecuación. Esta recta divide al plano en dos regiones o semiplanos**
- **Para averiguar cuál es la región válida, se elige un punto y se comprueba si las coordenadas satisfacen o no la inecuación.**

2) La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Como sucede con los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución, en el caso de que exista el conjunto solución puede ser acotado o no.

Programación Lineal

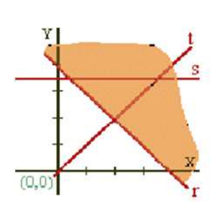
Determinación de la región factible

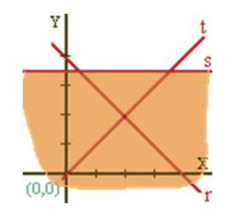
EJEMPLO:

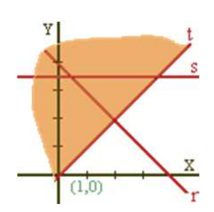
Dibujar la región factible asociada a las restricciones:

$$x + y \geq 4$$
$$y \leq 4$$
$$y \geq x$$

Las rectas asociadas son : r : *x* + *y* = 4 ; s : *y* = 4 , t: *y* = *x*





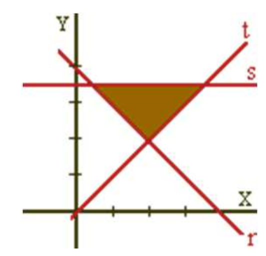


Semiplanos asociados a cada una de las rectas

Programación Lineal

Determinación de la región factible

La región factible está formada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, puntos que se encuentran en los tres semiplanos anteriores



Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

Un problema de programación lineal en dos variables, tiene la siguiente formulación:

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & z = f(x,y) = ax + by + c \\ \text{sujeto a:} & a_1x + b_1y \leq c_1 \\ & a_2x + b_2y \leq c_2 \\ & \vdots \\ & a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

pudiendo cambiarse maximizar por minimizar, y el sentido de las desigualdades

En un problema de programación lineal intervienen:

• **f(x,y) = ax + by + c función objetivo** que hay que optimizar.

x , y : variables de decisión,

a, b y c: constantes

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

• Las restricciones , inecuaciones lineales. Su número depende del problema en cuestión.

El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones, disponibilidades o necesidades. Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos.

• Región factible, conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; todo punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución.

• La solución óptima un par de valores (x0, y0) del conjunto factible que haga que f(x,y) tome el valor máximo o mínimo.

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

Las rectas de nivel dan los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Si la función objetivo es $f(x,y) = ax + by + c$, la ecuación de las rectas de nivel es de la forma:

$$ax + by + c = 0 \leftrightarrow ax + by = k$$

❖Variando k se obtienen distintos niveles para esas rectas y, en consecuencia, distintos valores para $f(x,y)$.

❖En un problema todas las rectas de nivel son paralelas, pues a y b de la recta $ax + by = k$ son los que determinan su pendiente. , trazada una cualquiera de esas rectas, las demás de obtienen por desplazamientos paralelos a ella.

❖En un PPL, los únicos puntos que interesan son los de la región factible, y las únicas rectas de nivel que importan son aquellas que están en contacto con dicha región. Como el nivel aumenta o disminuye desplazando las rectas sobre la región factible, se alcanzará el óptimo

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

- Un problema de programación lineal con 2 variables de decisión se puede representar gráficamente en el plano cuyas coordenadas son las propias variables
- Para ello se representan las rectas variables, que resultan de convertir las restricciones de desigualdad en ecuaciones
- Se determina con el signo de desigualdad el semiplano que define cada restricción
- La región factible queda determinada por la intersección de los semiplanos que definen las restricciones.

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

EJEMPLO:

$$\max z = x + y$$
$$0 \le x \le 4$$
$$0 \le y \le 4$$
$$y \ge x/2$$

Se representa la región factible:

Resolviendo los sistemas correspondientes calculamos los vértices de la región factible:

{ y = x/2 , x = 0 } nos da el vértice O(0,0)

{ x = 4, y = x/2 } nos da el vértice A(4,2)

{ x = 4 , y = 4} nos da el vértice B(4,4)

{ y = 4 , x = 0 } nos da el vértice C(0,4)

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

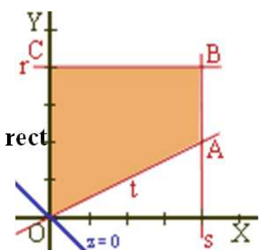
Se representan las rectas de nivel :

Inicialmente se representas Z = x + y = 0

Trasladándola hacia la derecha, se obtienen las rect

x + y = 2, x + y = 4, x + y = 8 ,

es decir aumenta el nivel.



Se obtiene la solución óptima:

Se obtiene en el punto de la región factible que hace máximo k. En este caso, esto ocurre en el punto B; es el último punto de contacto de esas rectas con la región factible , para el que k = 8.

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

EJEMPLO:

Considerando el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar } z = x_1 + 3x_2 \\ &\textit{sujeto a: } \quad x_1 + x_2 \le 6 \\ &\qquad\qquad -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Se representa la región factible.

Para dibujar las rectas correspondientes a las restricciones y a valores constantes de la función objetivo (iso-beneficio) se hallan los cortes con los ejes .

Programación Lineal

Solución: Método Gráfico

$$x_1 + x_2 = 6 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \end{cases}$$

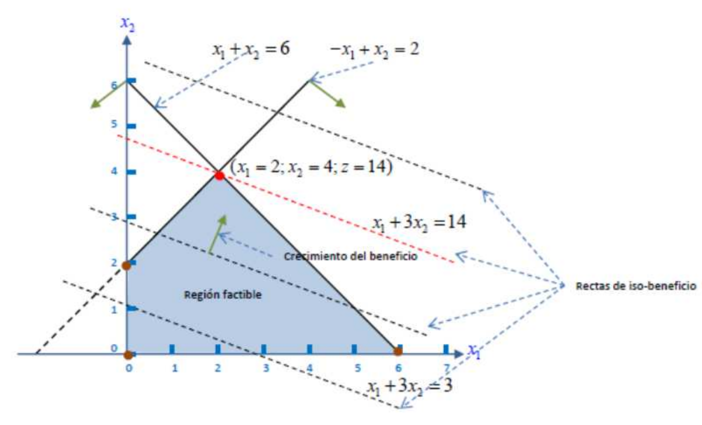
$$-x_1 + x_2 = 2 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 + 3x_2 = 3 \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \end{cases}$$

- **Se grafican las rectas**
- **Se determina con el signo de desigualdad el semiplano que define cada restricción (marcado en el dibujo con una flecha verde perpendicular a la recta)**
- **Se grafica la función objetivo para diferentes valores (rectas de nivel)**



Solución: Método Gráfico



Las rectas paralelas de iso-beneficio aumentan el valor de z conforme se alejan del origen en el cuadrante positivo. Es evidente que el valor de z de la recta que pasa por el punto extremo (2,4) de la región factible determina el valor óptimo del problema (z=14).

Solución: Método Gráfico

Las rectas con valores de z superiores a 14 ya no intersectan la región factible.

Se verá que el óptimo de un problema lineal es siempre un punto extremo de la región factible. Para 2 variables un vértice del polígono factible

Programación Lineal

Teorema Fundamental de la PL

En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices, también toma idéntico valor en los puntos del segmento que determinan.

En el caso de que la región factible no es acotada, la función lineal objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero, si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región

Este resultado permite conocer otro método de solucionar un programa con dos variables.

Programación Lineal

Tipos de Soluciones

Factibles con solución única:

Si existe el conjunto de soluciones o valores que satisfacen las restricciones.

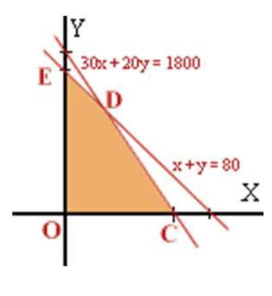
EJEMPLO:

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de 1800 millones de soles, siendo el costo de cada tipo de casa de 30 y 20 millones, respectivamente. El gobierno exige que el número total de casas no sea superior a 80.

Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo A es 4 millones y de 3 millones por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Programación Lineal

Tipos de Soluciones



Variables:
x = nº de casas tipo A ;
y = nº de casas tipo B
Función objetivo:

Restricciones:

Se hallan los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices

f(O) = f(0,0) = 0 ; f(C)=f(60,0) = 240 ;f(D) = f(20,60) = 260 ; f(E) = f(0,80) = 240

La solución es única, y corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo.

Vértice D(20,60). Por tanto se deben construir 20 casas de tipo A y 60 de tipo B con un costo de 260 millones de soles

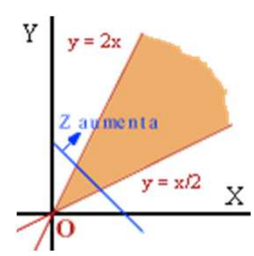
Programación Lineal

Tipos de Soluciones

Con solución no acotada

Cuando no existe límite para la función objetivo

$$\max z = x + y$$
$$y \leq 2x$$
$$y \geq x/2$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$



La región factible es una región no acotada.

La función crece indefinidamente para valores crecientes de x e y.

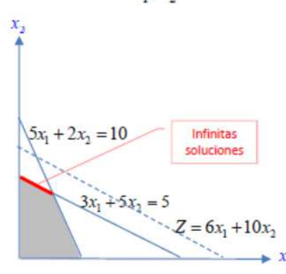
En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.

Programación Lineal

Tipos de Soluciones

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar } z = 6x_1 + 10x_2 \\ &\textit{sujeto a:} \quad 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ &\qquad 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



Un problema factible que tenga la recta de iso-beneficio paralela a la recta de una restricción que contenga un punto extremo óptimo, tendrá todo un segmento de puntos óptimos.

Programación Lineal

Tipos de Soluciones

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2 \\ &\textit{sujeto a:} \quad x_1 + x_2 \ge 4 \\ &\qquad x_1 \ge 2 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

x_2

∞ ↑

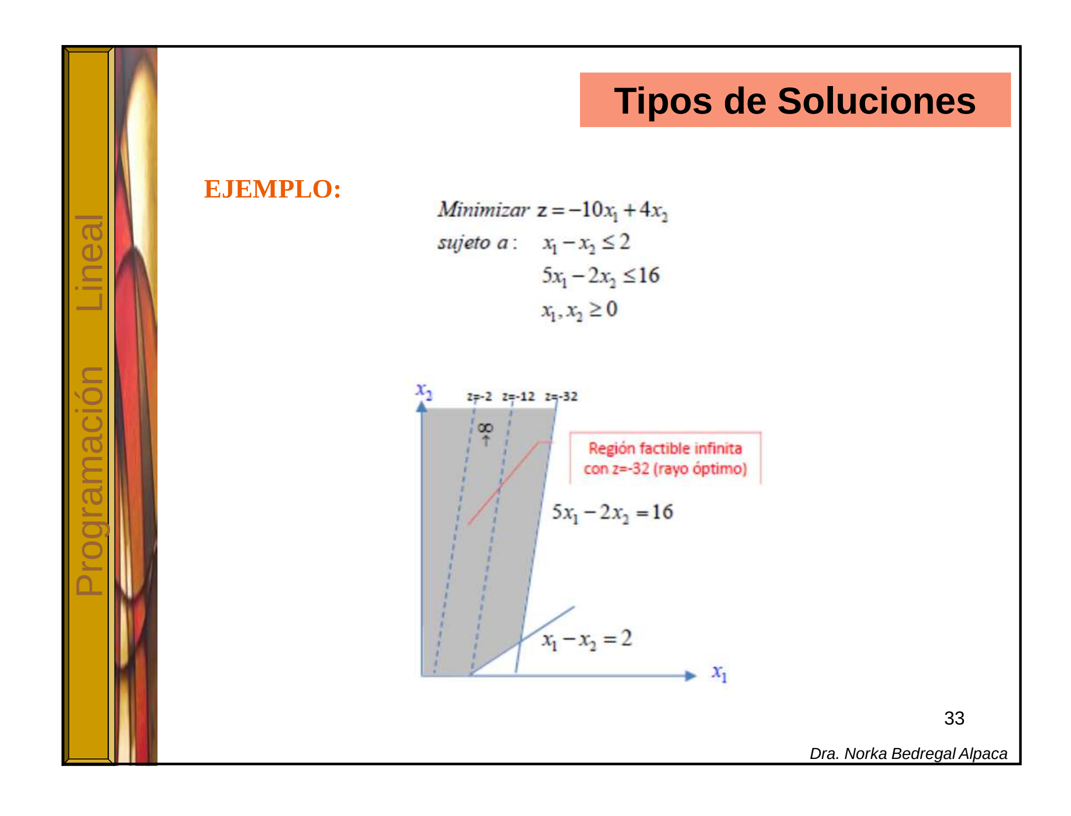
Región factible infinita

$\to \infty$

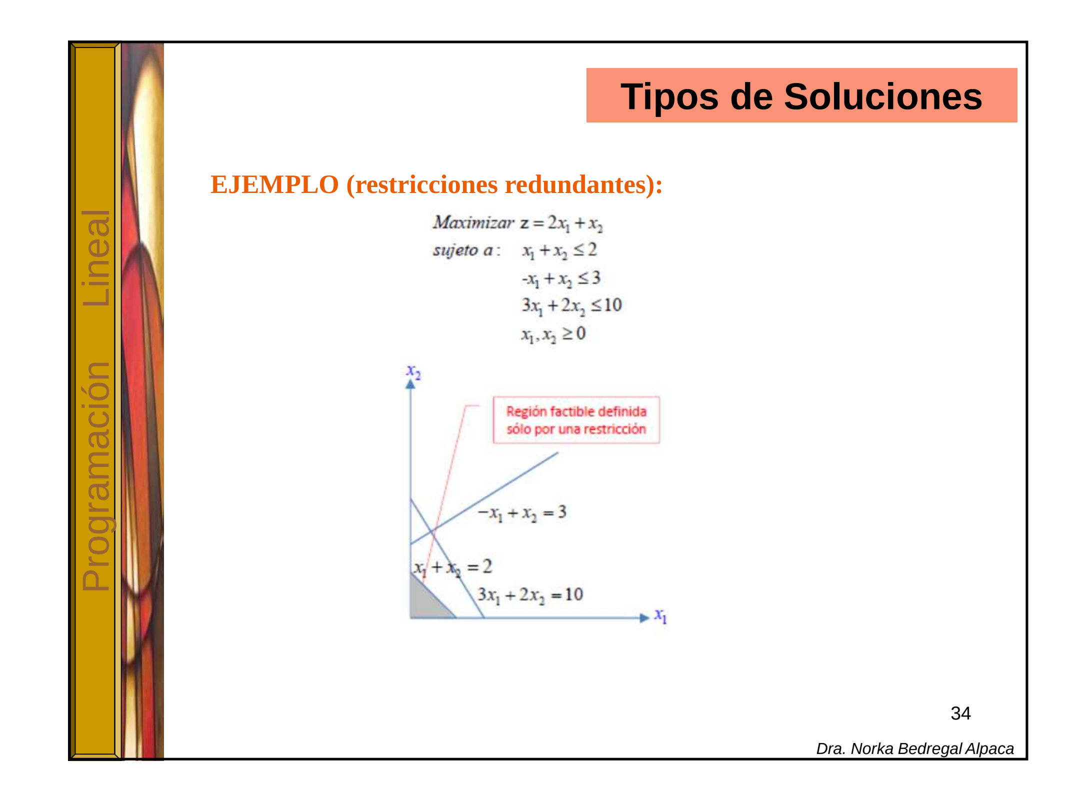
$x_1 \ge 2$

$x_1 + 2x_2 = 4$

x_1



Programación Lineal
Tipos de Soluciones
EJEMPLO:
$Minimizar\ z = -10x_1 + 4x_2$
$sujeto\ a: \quad x_1 - x_2 \leq 2$
$5x_1 - 2x_2 \leq 16$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_2
z=-2 z=-12 z=-32
Región factible infinita
con z=-32 (rayo óptimo)
$5x_1 - 2x_2 = 16$
$x_1 - x_2 = 2$
x_1
33
Dra. Norka Bedregal Alpaca



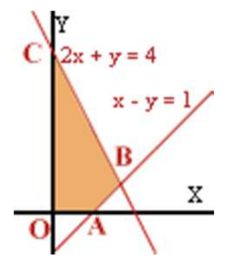
Programación Lineal
Tipos de Soluciones
EJEMPLO (restricciones redundantes):
$Maximizar\ z = 2x_1 + x_2$
$sujeto\ a: \quad x_1 + x_2 \leq 2$
$-x_1 + x_2 \leq 3$
$3x_1 + 2x_2 \leq 10$
$x_1, x_2 \geq 0$
x_2
Región factible definida
sólo por una restricción
$-x_1 + x_2 = 3$
$x_1 + x_2 = 2$
$3x_1 + 2x_2 = 10$
x_1
34
Dra. Norka Bedregal Alpaca

Programación Lineal

Tipos de Soluciones

Factibles con solución múltiple:

$$\max z = 4x + 2y$$
$$2x + y \le 4$$
$$x - y \le 1$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$



Los valores de la fucnión objetivo en cada uno de los vértices son:

f(O)=f(0,0) = 0 , f(A) = f(1,0) = 4 ; f(B)=f(5/3,2/3) = 8 , f(C) = f(0,4) = 8

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices B y C, por tanto, en todos los puntos del segmento BC.

Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible

Programación Lineal

Tipos de Soluciones

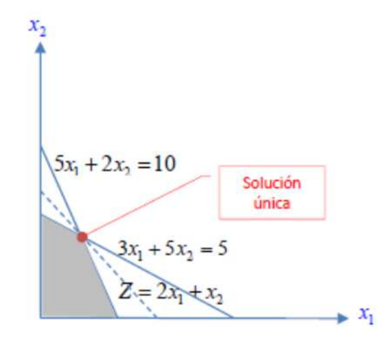
EJEMPLO:

Maximizar $z = 2x_1 + x_2$

sujeto a : $5x_1 + 2x_2 \le 10$

$3x_1 + 5x_2 \le 15$

$x_1, x_2 \ge 0$



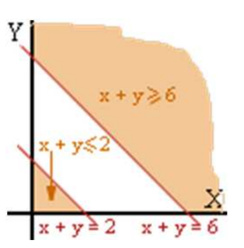
Tipos de Soluciones

Programación Lineal

No factibles:

Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes

$$\max z = 3x + 8y$$
$$x + y \leq 2$$
$$x + y \geq 6$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$



No existe la región factible, ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones .

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible.

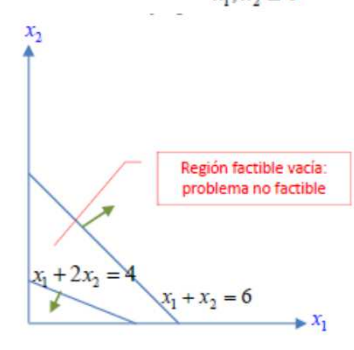
Este tipo de problemas carece de solución

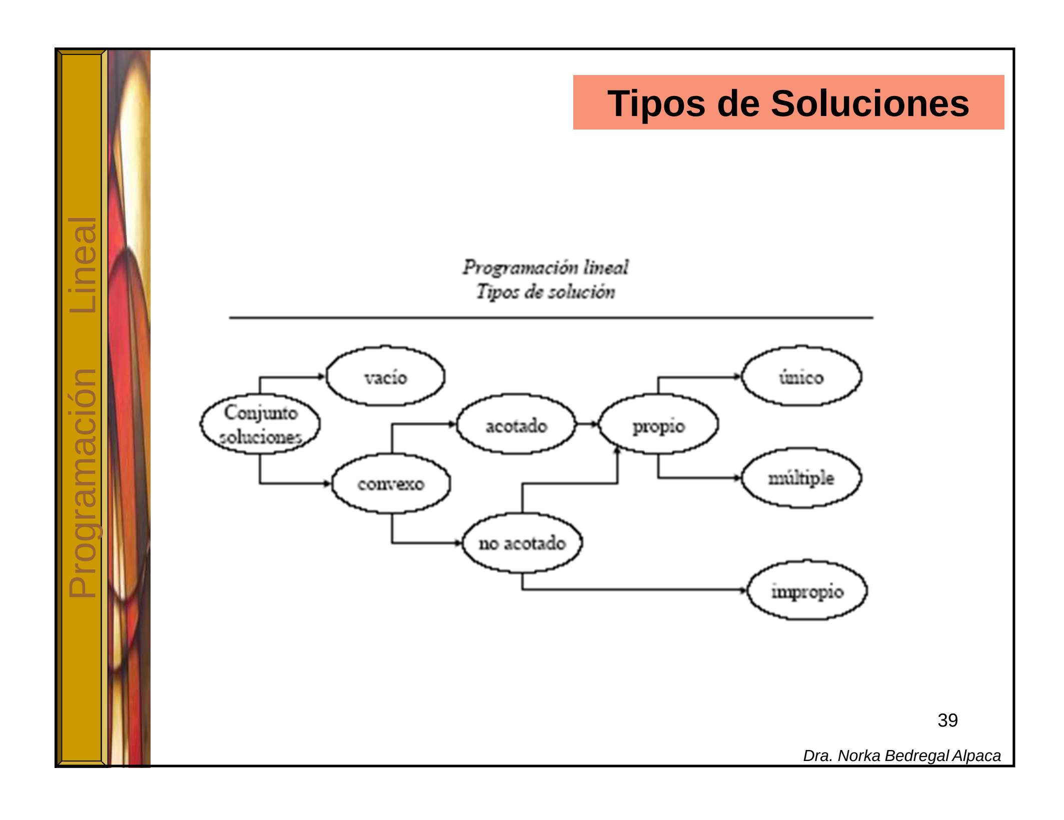
Tipos de Soluciones

Programación Lineal

EJEMPLO:

$$\textit{Maximizar } z = x_1 + 3x_2$$
$$\textit{sujeto a}: \quad x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$





Práctica en clase

Problema 1:

Las restricciones pesqueras impuestas por el Ministerio obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de sardina, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 1.0 soles/kg y el precio de la sardina de 1.5 soles/kg, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

Problema 2:

Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30% de p y un 40% de q, B está compuesto de un 50% de p y un 20% de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones: La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos.

a. ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?

b. ¿Qué mezcla hace q mínimo?

Programación Lineal

Práctica en clase

Problema 3: transporte

Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de computador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costos de transporte, en soles por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el costo sea mínimo?

	Tienda A	Tienda B	Tienda C
Fábrica I	3	7	1
Fábrica II	2	2	6

Dra. Norka Bedregal Alpaca

Programación Lineal

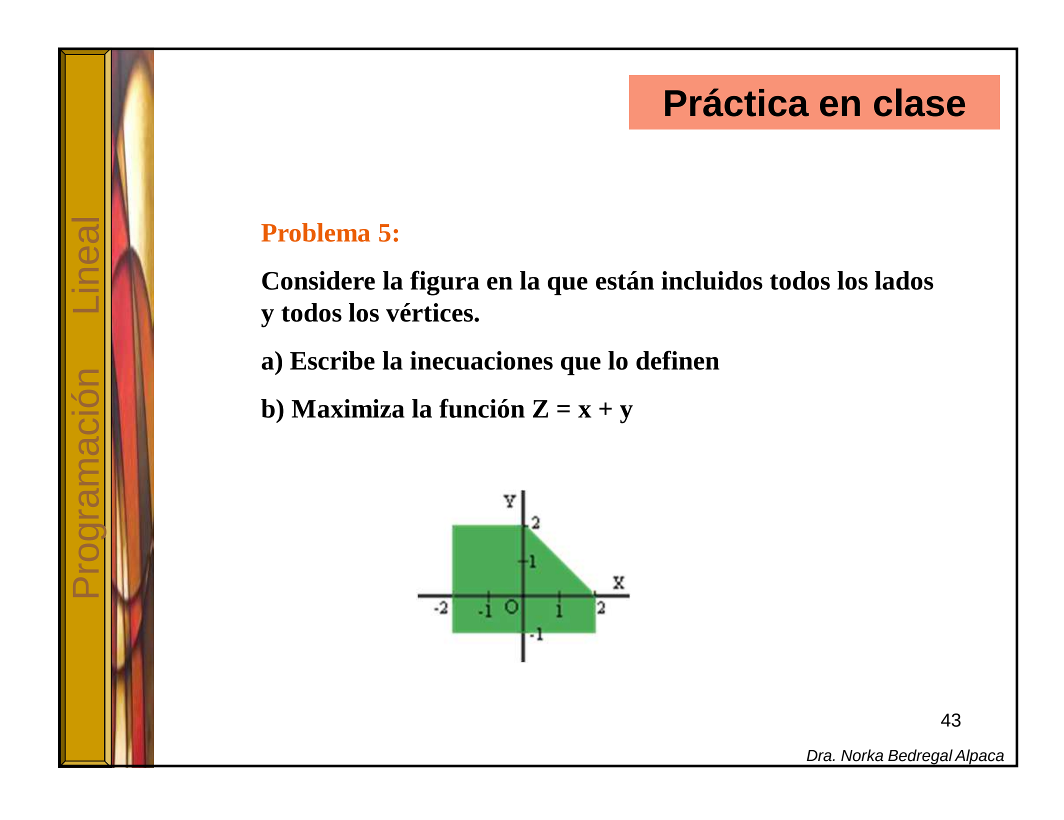
Práctica en clase

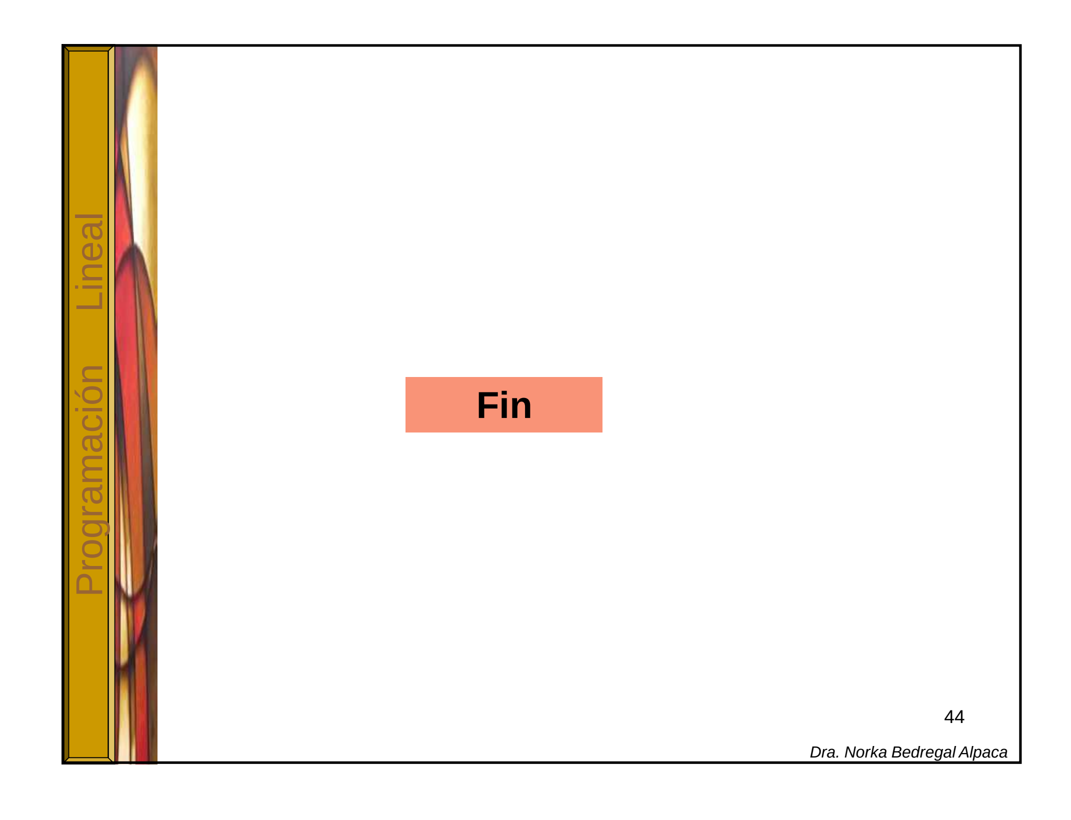
Problema 4: Dieta

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 soles y el del tipo Y es de 30 soles

¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo ?

Dra. Norka Bedregal Alpaca


Programación Lineal
Práctica en clase
Problema 5:
Considere la figura en la que están incluidos todos los lados y todos los vértices.
a) Escribe la inecuaciones que lo definen
b) Maximiza la función Z = x + y
Y
2
1
X
-2
-1
O
1
2
-1
43
Dra. Norka Bedregal Alpaca


Programación Lineal
Fin
44
Dra. Norka Bedregal Alpaca